Revista de Educación Infantil https://
doi.org/10.1007/s10643-024-01826-2

Funciones directas e inversas en preescolar: un estudio de caso con un niño de 4 años

Sandra Fuentes1 · María C. Cañadas1

Aceptado: 30 de noviembre de 2024

Abstracto

Este trabajo forma parte de una iniciativa de investigación más amplia que examina el pensamiento algebraico. Presenta un estudio de caso que involucra a una estudiante de 4 años, examinando su perspectiva funcional a través del trabajo individual. Nuestro interés radica en el pensamiento funcional de la primera infancia. Específicamente, nuestro objetivo de investigación es describir cómo la niña completó dos tareas que involucraban funciones lineales y sus respectivas funciones inversas. Planteamos preguntas relacionadas con números cercanos específicos, números lejanos específicos y las generalizaciones mismas. Recopilamos datos de su trabajo escrito individual en las dos tareas y de una entrevista individual. Analizamos las estrategias que empleó para generalizar, las representaciones y generalizaciones que realizó y cómo estableció relaciones entre variables. Observamos que utilizó representaciones pictóricas y verbales para completar las tareas propuestas y logró generalizar con éxito. Como estrategia, contó dibujos; sin embargo, al verbalizar su enfoque, creó grupos de elementos similares y los distribuyó de manera innata en grupos iguales cuando trabajó con la función inversa.

Palabras clave Función directa · Pensamiento funcional · Generalización · Función inversa · Representaciones de resolución de problemas · Estrategias

Introducción

Es en la educación temprana, tanto formal como informal, donde los estudiantes desarrollan habilidades clave. El pensamiento matemático surge intuitivamente en los niños cuando se enfrentan a actividades desafiantes (Blanton y Kaput, 2011). El pensamiento funcional, que identifica relaciones matemáticas entre elementos variables, es una de las últimas áreas de investigación en la investigación del álgebra temprana. El concepto se originó en Estados Unidos con el objetivo de incorporar el pensamiento algebraico en la educación de la primera infancia. La intención es proporcionar a los estudiantes actividades que fomenten el pensamiento algebraico desde una edad temprana, alentándolos a detectar similitudes, diferencias, repeticiones y otros aspectos de las regularidades, así como a realizar operaciones aritméticas para generalizar, comenzando con números cercanos específicos y progresando hasta

Establecer relaciones en cualquier escenario dado. Por ejemplo, Blanton y Kaput (2004) pidieron a niños de 3 a 5 años que encontraran las diferentes relaciones entre un grupo de perros y las partes de su cuerpo. Sin instrucción previa sobre funciones, los estudiantes descubrieron que la relación entre el número de ojos y el número de perros podía describirse mediante la función f(n)=2n, que reconoce "pares". Los autores enfatizan que este tipo de actividades, en las que los niños carecen de estrategias predeterminadas y deben buscar relaciones, pueden cambiar la forma en que piensan sobre las matemáticas y pueden contribuir al aprendizaje del álgebra en los grados superiores. Estos hallazgos respaldan la incorporación de tareas en el aprendizaje formal e informal para promover el pensamiento funcional entre los niños como parte de la instrucción temprana del álgebra.

El pensamiento algebraico se ha integrado en los currículos escolares de varios países, entre ellos Estados Unidos, Australia, Finlandia y Chile (Pincheira & Alsina, 2021). El pensamiento algebraico se incorporó al currículo de Educación Primaria español en 2022 (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022a) y, aunque no forma parte explícita del currículo de Educación Infantil, existen varias menciones al desarrollo del pensamiento algebraico como una competencia transversal a desarrollar en esta etapa educativa (MEFP, 2022b).

* Sandra Fuentes
sandrafuentesm@gmail.com
María C. Cañadas
mconsu@ugr.es

1 Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, Granada, España

Published online: 19 December 2024

El pensamiento funcional enfatiza las funciones como conceptos matemáticos clave (Cañadas & Molina, 2016). Las funciones lineales se utilizan en la investigación para analizar diferentes nociones relacionadas con el pensamiento funcional de los estudiantes de educación primaria (Blanton & Kaput, 2011; Fuentes & Cañadas, 2021; Torres et al., 2018) y preescolar (Anglada & Cañadas, 2021; Blanton & Kaput, 2004; Brizuela et al., 2015). Las funciones más utilizadas en estos estudios son las formas aditivas como f(n)=n+ m. Varios estudios exploran la noción de duplicación a través de la función f(n)=2n (Cañadas et al., 2016).

Las estructuras multiplicativas se suelen introducir en la educación preescolar a través de los conceptos de duplicación y división por la mitad (NCTM, 2000; MEFP, 2022b). El currículo de educación infantil español es bastante amplio y hace escasa mención a las matemáticas. Cabe destacar que, si bien no incluye explícitamente nociones de pensamiento funcional o comprensión algebraica, hay conceptos que se pueden explorar en estos niveles, como patrones, clasificación y cuantificación. De hecho, trabajar sobre ellos es una práctica habitual en las aulas de educación infantil debido al carácter práctico del currículo de matemáticas.

Dada una función con dos variables, existen dos formas de establecer una relación entre ellas: la forma directa y la inversa. Al buscar estudios sobre la función inversa, encontramos que la investigación es escasa. Aunque no se aborda en el contexto español, en otros países donde se enseña el pensamiento algebraico forman parte de las relaciones entre variables. Sin embargo, encontramos algunos estudios realizados en

nivel primer grado (Fuentes & Cañadas, 2021; López-Centella, 2019) que data de antes de que se incluyera el pensamiento algebraico en la educación primaria, pero no hay literatura sobre educación preescolar. Este artículo se centra en las funciones lineales de estructuras multiplicativas y sus respectivas funciones inversas en la educación preescolar, específicamente a los 4 años. El objetivo principal de la investigación es describir los pasos que sigue un estudiante de 4 años para resolver dos tareas de generalización que involucran las funciones f(n)=n y f(n)=3n y sus respectivas funciones inversas.

Marco conceptual y antecedentes

Los autores destacan la importancia de investigar el pensamiento funcional y difundir los hallazgos para comprender mejor el pensamiento funcional practicado por los estudiantes, así como para dar mayor visibilidad a los esfuerzos de investigación actuales, particularmente en España (Cañadas y Molina, 2016).

Smith (2008) definió el pensamiento funcional como una actividad cognitiva que se centra en establecer relaciones entre dos o más cantidades variables. Las funciones matemáticas forman la base de este proceso. El pensamiento funcional se centra en la generalización y expresión de una relación entre cantidades que varían conjuntamente (Blanton et al., 2011), es decir, funciones. Este estudio adopta la definición de pensamiento funcional propuesta por Cañadas y Molina (2016), quien lo describió como un proceso cognitivo que forma parte del pensamiento algebraico y se basa en construir, describir, representar y razonar con y sobre funciones y sus componentes. La generalización y la representación son, por tanto, elementos clave en el pensamiento funcional; de hecho, son dos de las cuatro prácticas algebraicas propuestas por Blanton et al. (2011) y Kaput (2008).

El pensamiento funcional ocurre cuando los estudiantes articulan explícitamente la relación entre variables o conjuntos, ya sea verbalmente o usando gestos, números o dibujos para establecer la relación identificada y aplicando razonamiento abstracto para generalizar la expresión, encontrando finalmente una regla que describe la relación funcional entre esas variables (Fuentes, 2014).

En comparación con la literatura sobre pensamiento funcional en educación primaria, los estudios en el nivel preescolar son escasos (Narváez et al., 2023). En esta sección se describen aquellos estudios relevantes para nuestros intereses de investigación y que involucran a estudiantes de edades similares. Blanton y Kaput (2011) enfatizan en general la importancia de introducir el pensamiento funcional en la educación infantil, ya que el establecimiento de relaciones funcionales surge de manera intuitiva en estos grados. En los últimos años, varios estudios han examinado el pensamiento algebraico en la educación preescolar.

En cuanto a las funciones inversas, entendemos que dos funciones, f y g, son inversas entre sí si g(f(x))=f(g(x))=x. Por lo tanto, podemos suponer que los roles de las variables son intercambiables en las dos funciones (Torres et al., 2024). En consecuencia, la variable dependiente se convierte en la variable independiente y viceversa. Hay muy pocos estudios sobre cómo los estudiantes de primaria abordan la función inversa. En un artículo, cuando se les presentaron las estructuras multiplicativas f(n)=n, f(n)=3n y f(n)=5n, cuatro estudiantes de primer grado formaron grupos que contenían la misma cantidad de elementos cuando la función era directa y dividieron la función en dos.

cantidad total en partes iguales cuando la función era inversa (Fuentes & Cañadas, 2021). Por ello, consideramos relevante descubrir qué hacen los alumnos de jardín de infancia cuando se les presenta una tarea de generalización que involucra una estructura multiplicativa y su función inversa.

Representaciones

El estudio de las representaciones comenzó en la década de 1980, particularmente en la investigación sobre las funciones y sus diversas representaciones (Duval, 1993). Duval afirmó que cuanto mayor sea el número de representaciones diferentes de un concepto matemático, más sólida será nuestra comprensión del mismo. En la literatura se pueden encontrar diversas definiciones de representaciones. Por ejemplo, Rico (2009) se refiere a la representación como la externalización del concepto. Las funciones son los contenidos matemáticos que se encuentran en el pensamiento funcional. Las representaciones se consideran esenciales en este enfoque del pensamiento funcional.

porque ayudan a (a) representar conceptos y procedimientos asociados con funciones; (b) mediar entre sujetos, funciones y relaciones funcionales; y (c) establecer un medio para expresar relaciones entre variables (Brizuela y Earnest, 2008; Carpenter y Franke, 2001).

En la literatura, las funciones se asocian a una serie de representaciones, ya sea de forma pictórica, simbólica, verbal, tabular, gráfica o gestual (Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Cañadas et al., 2024; Radford, 2003). La evidencia indica que las representaciones más utilizadas por el alumnado de Educación Infantil y Primaria son las pictóricas y verbales (Fuentes, 2014), aunque es posible orientarles para que utilicen otros tipos, como las representaciones tabulares o algebraicas (Torres et al., 2022).

Brizuela y sus colegas (Brizuela y Lara-Roth, 2002; Brizuela et al., 2015) se centraron en tareas que implicaban el pensamiento funcional. Aunque los estudiantes tendían a utilizar la representación verbal en primera instancia, los investigadores los animaron a utilizar otras formas, especialmente la notación algebraica, que algunos estudiantes incluso demostraron ser capaces de utilizar con fluidez. Cañadas y Fuentes (2015) informaron que la representación utilizada por los estudiantes dependía de la naturaleza de las preguntas planteadas. Así, al responder preguntas sobre números casi consecutivos (n = 1, 2, 3, 4 y 5), los estudiantes utilizaban la representación pictórica, pero al considerar números lejanos no consecutivos (n = 8, 10, 20 y 100), los estudiantes utilizaban representaciones simbólicas como series de 5 basadas en la cantidad de niños.

Estrategias

Consideramos que las estrategias son los comportamientos que exhiben los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea matemática (Rico, 1997). En este trabajo se proponen tareas de generalización que involucran funciones. Castro et al. (2017) trabajaron con estudiantes de último año de preescolar (edades 5-6) en tareas que involucraban estructuras aditivas y multiplicativas. Cuando se les presentó la función f(n)=2n, las estrategias de los estudiantes fueron sumar el mismo número dos veces o duplicar la cantidad, que son equivalentes. Cañadas y Fuentes (2015) observaron una estrategia mediante la cual los estudiantes seguían la serie con 2 s o sumaban 2 s a los valores de las variables. La formación de grupos de elementos fue una de las estrategias observadas en este estudio. Estos autores trabajaron con 32 estudiantes de primer grado. Al responder una pregunta donde f(n)=5n y los valores eran mayores y no consecutivos (n=8, 10 y 20), algunos de ellos armaron grupos de 5 elementos. Cuando los valores eran cercanos y consecutivos a aquellos con los que habían trabajado previamente, o bien contaban los dibujos que representaban valores de las variables o bien respondían directamente sin indicar la estrategia utilizada. Los autores destacaron una estrategia particular mediante la cual un estudiante escribió tantos números 5 como elementos se le solicitaron.

Examinando cómo 30 estudiantes de primer grado abordaron una función que involucra la estructura aditiva f(x) = 5 + x, Morales et al. (2018) distinguieron entre estrategias relacionadas con el conteo y aquellas relacionadas con la operación. En el conteo, los autores identificaron estrategias como respuesta directa, conteo total y conteo a partir del valor más alto del sumando, mientras que en la operación las estrategias implicaban descomponer números, recordar hechos numéricos y modificar los datos iniciales. López-Centella (2019) analizó las respuestas de 30 estudiantes de primer grado a una tarea de generalización que involucraba la función f(n)=n+5. A los estudiantes también se les preguntó sobre la función inversa, con la que encontraron mayor dificultad. El autor describió varias estrategias utilizadas para resolver el problema tanto en la forma directa como en la inversa, incluyendo: (a) respuesta directa, (b) variación constante, (c) conteo de operación, (d) particularización, (e) generalización, (f) repetición y (g) recursión.

Nuestra revisión bibliográfica indica que a mayor grado escolar, más complejas son las estrategias empleadas. Así, 21 estudiantes de 2º de ESO que trabajaban en un problema que involucraba la función f(n)=2n utilizaron las estrategias de contar de 2 en 2, duplicar o sumar el número a sí mismo (Cañadas et al., 2016).

Generalización

La generalización es un proceso de abstracción empírica que implica la progresión desde uno o algunos hasta todos. Es de naturaleza extensiva (Piaget, 1978) y consiste en mirar lo general en lo particular y lo particular en lo general (Mason, 1996). Cañadas y Castro (2007) describen la generalización como una expresión que engloba todos los casos posibles y que, a partir de los casos particulares, se construye mediante inducción. La generalización es un eje fundamental de la construcción del conocimiento y su objetivo último es encontrar relaciones entre los objetos en estudio.

Cañadas y Fuentes (2015) demostraron que estudiantes de primer grado de primaria establecieron relaciones funcionales en una tarea que involucraba la función f(n)=5n. Se enfocaron en los tipos de representación y las estrategias que utilizaron los estudiantes para completar la tarea con éxito. Ocho de los 32 estudiantes lograron generalizar, por ejemplo, al afirmar que corresponde a 5 cada uno, independientemente del número de estudiantes en la pregunta. Castro et al. (2017) diseñaron e implementaron intervenciones con un grupo de 12 estudiantes de último año de preescolar (edades 5-6). Estos estudiantes evidenciaron pensamiento funcional al identificar la relación entre los collares que usan un grupo de perros (f(n)=n). Algunos estudiantes también reconocieron la regularidad de la función f(n)=n+1.

Blanton y Kaput (2004) y Castro et al. (2017) emplearon funciones similares en tareas de generalización con estudiantes de preescolar. Blanton y Kaput (2004) utilizaron tareas que involucraban la función identidad y la función f(n)=2n
con un grupo de niños de 3 años. Utilizaron fotografías para presentar la situación en la que debían incluir los pares de valores de las variables que se encuentran en una tabla. Los estudiantes gradualmente

Descubrieron propiedades como la paridad y la relación aditiva o multiplicativa entre las variables. En algunos casos, también pudieron incorporar la notación algebraica a sus respuestas.

Los objetivos específicos de este estudio fueron (a) describir las representaciones utilizadas para resolver las tareas propuestas, (b) describir las estrategias empleadas para resolver dichas tareas y (c) analizar las generalizaciones realizadas al resolver las tareas.

Método

Este estudio es descriptivo y exploratorio (Hernández et al., 2010). Es descriptivo porque el análisis de los datos pretende describir los procesos de pensamiento funcional del alumnado, mientras que es exploratorio porque no hemos encontrado evidencia de investigaciones similares con niños de 4 años. Es un estudio de caso porque analiza un caso representativo o típico en el que no consideramos que existan circunstancias excepcionales.

Nuestra investigación puede, por tanto, ser replicada en una población similar (Yin, 2009). Adoptamos una perspectiva constructivista, ya que consideramos al alumno como el constructor de su propio aprendizaje (Piaget, 1952).

Seleccionamos a una niña de 4 años de edad que cursa un preescolar en España como representante de este grupo de edad. Nuestro objetivo era comprobar la aplicabilidad en España de varias tareas empleadas en investigaciones en otros países. La seleccionamos intencionadamente en función de su disponibilidad, permiso de los padres y su notable rendimiento en las actividades habituales del aula. Tenía habilidades de lectura y escritura muy elementales y podía reconocer y escribir ciertas letras, números y su nombre, lo que mostraba lo que se considera un desarrollo normal a esta edad. En cuanto a los conocimientos previos relacionados con este estudio, había trabajado con patrones figurativos. Su familia es de origen chileno, de clase media y sus padres tienen títulos universitarios.

La recolección de datos fue realizada por el autor principal de este artículo y comprendió (a) la administración de una prueba escrita, donde se le proporcionó al estudiante el contexto de cada tarea y se le dejó trabajar en la parte escrita sin ninguna ayuda o intervención (aunque fue acompañado durante todo el proceso en caso de que surgiera una contingencia); y (b) una entrevista semiestructurada, que comenzó revisando sus respuestas en la prueba escrita y haciendo preguntas sobre la generalización, la función inversa y la relación entre todas las variables.

Los investigadores involucrados en el proyecto, del cual este estudio forma parte, diseñaron e implementaron una prueba escrita que comprende dos tareas que involucran las funciones f(n)=n y f(n)=3n.

Las tareas se contextualizaron en un escenario de fiesta de cumpleaños. La prueba tuvo una duración de 1 h y 10 min y se administró por uno de los autores del estudio. Cada tarea se completó por separado. Las dos tareas se presentaron al estudiante antes

Después de completar ambas tareas, realizamos una entrevista semiestructurada y le pedimos que verbalizara lo que había retratado en la prueba escrita. También le hicimos varias preguntas sobre la función inversa. Como la estudiante no sabía escribir, la investigadora registró sus respuestas en la hoja de trabajo.

La prueba planteaba un escenario cotidiano: la compra de una serie de elementos para una fiesta de cumpleaños. La variable independiente era el número de niños invitados a la fiesta; las variables dependientes eran el número de sombreros y piruletas.

Estas dos tareas involucraban las funciones lineales f(n)=n y f(n)=3n, respectivamente. Cada una de las tareas incluía secciones en las que primero se le preguntaba al estudiante sobre números consecutivos cercanos. números (n=1, 2, 3, 4 y 5) antes de avanzar a números lejanos no consecutivos (n=8 y 10) hasta que se logró la generalización. La distinción entre valores cercanos y lejanos se basó en el rango numérico indicado en el currículo para su etapa de desarrollo (números cercanos) y aquellos que aún no había encontrado (números lejanos). A continuación se presenta una descripción de las tareas planteadas en este estudio.

Tarea 1

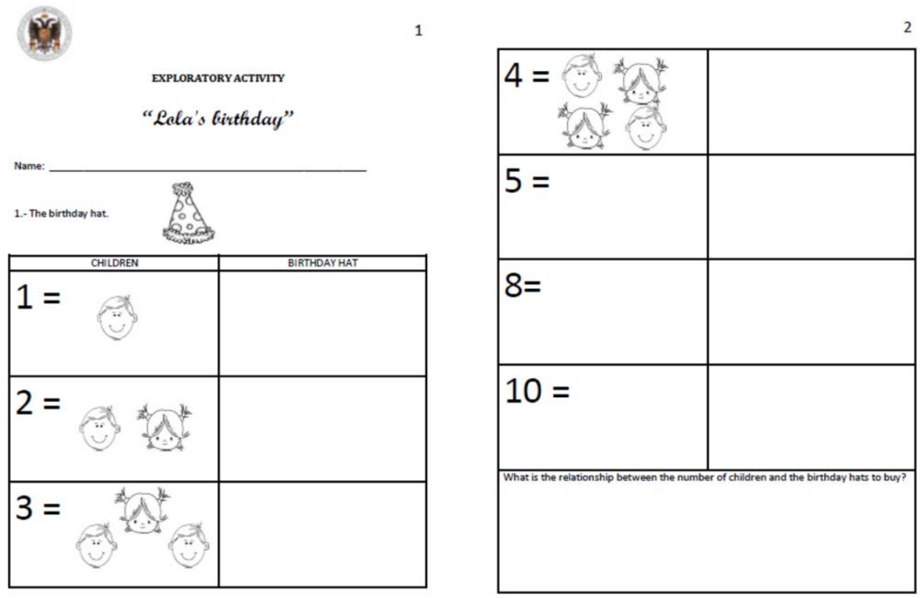
Esta tarea presentó la relación entre el número de niños y el número de sombreros que se debían comprar para la fiesta de cumpleaños. Se introdujo a través de números cercanos específicos. La función que determina esta relación es f(n)=n, donde el valor de la variable independiente siempre es el mismo que el valor de la variable dependiente. Le dimos a la estudiante una tabla que contenía la información que se muestra en la Figura 1. Luego le pedimos que considerara los casos específicos de 1, 2, 3, 4, 5, 8 y 10 niños y le preguntamos: "¿Cuál es la relación entre el número de niños y los sombreros que necesitamos comprar?" La tarea se presentó en dos hojas de trabajo: la primera con los valores para n = 1, 2 y 3 niños y la segunda con los valores para n = 4, 5, 8 y 10 niños y la relación entre ellos (ver Figura 1).

Tarea 2

Esta tarea presentó la relación entre el número de niños y el número de piruletas que se debían comprar para la fiesta de cumpleaños. Se introdujo a través de números cercanos específicos. La función que determina esta relación es f(n)=3n, donde el valor de la variable independiente es siempre un tercio del valor de la variable dependiente o, por el contrario, el valor de la variable dependiente es siempre tres veces el valor de la variable independiente. Le dimos al estudiante los valores para el caso de 1 niño y 3 piruletas.

paletas en forma de representación pictórica. Luego le pedimos que considerara los casos específicos de 1, 2, 3, 4, 5, 8 y 10 niños y le preguntamos: "¿Cuál es la relación entre la cantidad de niños y las paletas que necesitamos comprar?" Tarea

Fig. 1 Cuestionario para la tarea 1



2 se presentó en dos hojas de trabajo: la primera con los valores para n=1, 2, 3 y 4 niños y la segunda con los valores para n=5, 8 y 10 niños y la relación entre ellos (ver Figura 2).

Entrevista semiestructurada

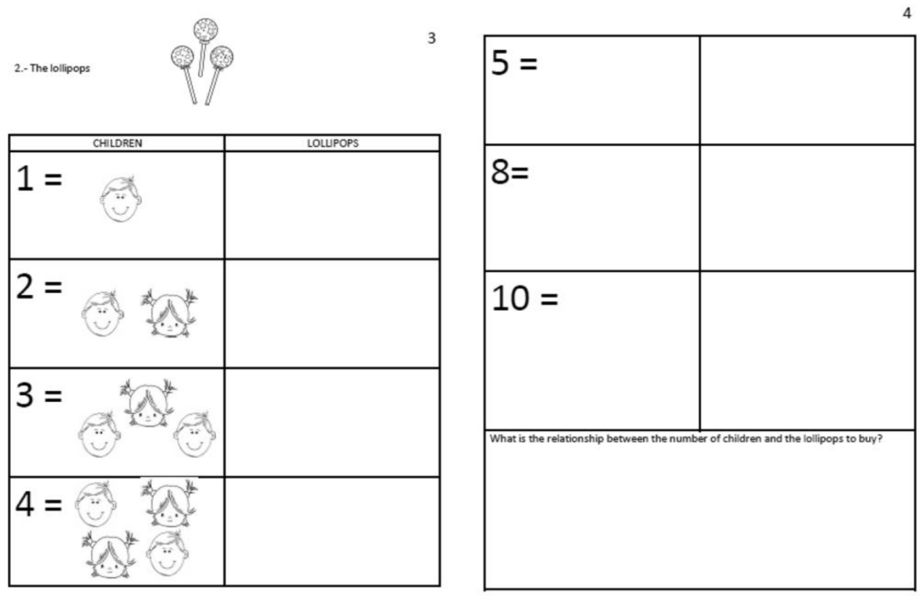
La entrevista se realizó en dos partes. En la primera se examinaron las respuestas dadas por la estudiante en la prueba escrita, para lo cual leímos las preguntas y las respuestas de la estudiante junto con ella. En la segunda, las tareas se complementaron con preguntas sobre valores específicos lejanos o indeterminados como "muchos". Para cada una de las tareas, preguntamos sobre

La función inversa y la relación entre las variables implicadas (niños-gorros-piruletas). A continuación, se ofrecen ejemplos de las preguntas planteadas durante la entrevista relacionadas con la función directa con dos variables, la función inversa con dos variables y las funciones con más de dos variables. Las preguntas realizadas por el investigador no motivaron ninguna representación o estrategia en particular.

Funciones directas con dos variables:

– Si a la fiesta de cumpleaños asisten 30 niños, ¿cuántos sombreros necesitaremos? ¿Y si asisten 100 niños?
– ¿Cuántas piruletas necesitaríamos si asisten muchos niños a la fiesta de cumpleaños?

Fig. 2 Cuestionario para la tarea 2



Funciones inversas con dos variables:

– Si tenemos 7 sombreros, ¿cuántos niños hay en el ¿fiesta?
– Y si tenemos 20 sombreros, ¿cuántos niños podemos tener? ¿invitar?
– Tenemos 6 piruletas. ¿Cuántos niños están invitados a participar? ¿la fiesta de cumpleaños?

Más de dos variables:

– Queremos invitar a todos los niños de tu clase. ¿Cuántos sombreros y piruletas tenemos que comprar?
– Y si sólo tenemos 12 piruletas, ¿cuántos niños pueden ir a la fiesta? ¿Cuántos sombreros necesitamos?

Categorías de análisis

Para analizar las respuestas de la prueba escrita y la entrevista, se utilizaron las categorías propuestas por Merino (2012) y Fuentes (2014), autores que exploran tareas de pensamiento funcional en los niveles de tercero y primero de primaria, respectivamente.

Para la evaluación global del desempeño del estudiante en la prueba escrita, se utilizaron las categorías propuestas por Merino (2012): (a) si respondió o no, y (b) si su respuesta fue correcta o incorrecta. Para abordar el primer objetivo específico sobre representaciones, se consideraron representaciones pictóricas, numéricas y verbales. Esta categoría no es excluyente, ya que la respuesta podría utilizar varias representaciones (por ejemplo, un número y un dibujo, que se considerarían pictóricas).

Para el objetivo específico sobre las estrategias utilizadas, se emplearon las categorías propuestas por Fuentes (2014): (a) respuesta directa: da un número como solución; (b) conteo dibujando: la respuesta incluye dibujos; (c) asociación de elementos en grupos: existen grupos de elementos; (d) cambia el número de hijos en la relación: aunque la relación es correcta, la solución corresponde a otro elemento (esto suele ocurrir cuando los números no son consecutivos); (e) otra estrategia: no hay una relación discernible en la solución.

Análisis de datos, resultados y discusión

Para el análisis de datos, los autores, que han estado estudiando el pensamiento funcional durante 10 años, revisaron independientemente las respuestas de los estudiantes y realizaron una codificación inicial. Si bien coincidimos en la mayoría de las categorías asignadas, cuando no fue así llegamos a un consenso. Por ejemplo, inicialmente categorizamos la Figura 3 (n=5 en la segunda tarea) como contar dibujos. Sin embargo, al notar la

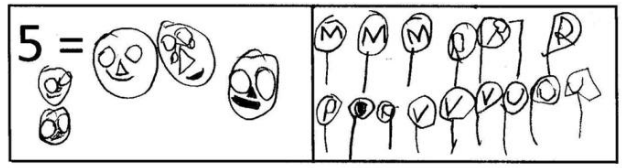


Fig. 3 Tarea 2, n=5

símbolos colocados dentro de las piruletas, recategorizamos esa respuesta como agrupación de elementos.

A continuación, presentamos las respuestas proporcionadas por el estudiante para la función directa tanto en la prueba escrita como en la entrevista. A continuación presentamos los resultados para la función inversa. Para abordar el objetivo específico final, la generalización, extraemos extractos relevantes de la entrevista que demuestran el pensamiento funcional, es decir, dondequiera que articule explícitamente la relación entre las variables (Fuentes, 2014).

Función directa

En las tareas 1 y 2, animamos al alumno a trabajar con la función directa, tanto en el test como en la entrevista. Tabla 1 Resume sus respuestas en las dos tareas según las categorías de análisis mencionadas anteriormente.

Todas las secciones respondidas fueron correctas. Sólo una sección (Tarea 2, n=8) quedó sin responder. La Figura 4, correspondiente a la Sección C de la Tarea 1, muestra cómo utilizó la representación pictórica, obteniendo la respuesta correcta contando dibujos.

Representaciones

Para responder las preguntas sobre la función directa, el estudiante utilizó representaciones pictóricas, simbólicas y verbales. Tabla 2 Resume los tipos de representaciones que el estudiante utilizó en cada sección.

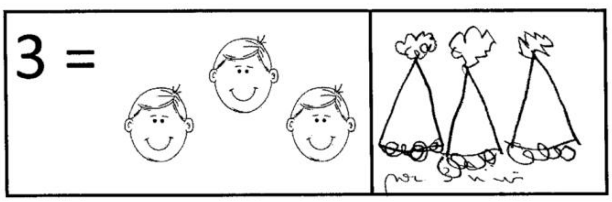
En el 50% de las Secs. (9/18) utilizó la representación pictórica, creando dibujos para obtener la solución del problema planteado (Fig. 5). Utilizó la representación numérica en 3 secciones de la Tarea 1, y la verbalización en la Sección H de la Tarea 1 y las Secciones G y H de la Tarea 2.

En la tarea 1, que involucraba números cercanos, utilizó dibujos de sombreros y escribió el número correspondiente (Fig. 6). Para los valores lejanos, escribió el número y dijo en palabras: "para 5 niños necesitamos 5 sombreros". En la tarea 2, dibujó las paletas para los valores cercanos y escribió el total en algunas de ellas.

En la entrevista, complementó su respuesta con una sucesión de 3 s. Por ejemplo, cuando se le planteó la pregunta para 2 niños, respondió: "para este 3 y para este 3" y escribió 3 y 3. Para las preguntas sobre números no consecutivos, respondió oralmente y creó grupos: "3 para el 1.º. 3 para el 2.º. 3 para el 3.º..." (Fig. 7).

Tabla 1 Resultados de la prueba escrita y entrevista sobre la función directa

	Sección de prueba escrita								Entrevista	
	A	B	do	D	Y	F	GRAMO	yo	Función directa	
Tarea 1	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=8	n=10	n=x	(n=30)	(n=100)
Respuesta										
Corrección										
Representación	Pictórico				Numérico			Verbal		
Estrategia	Dibujo contando, relación 1 a 1				Respuesta directa, relación 1 a 1					
Tarea 2	A	B	do	D	Y	F	GRAMO	yo	Función directa (muchas)	
Respuesta										
Corrección										
Representación	Pictórico						Verbal			
Estrategia	Dibujo de conteo, relación de 1 a 3				Agrupación en conjuntos de 3 elementos					



Note: For 3 children

Fig. 4 Tarea 1, Sección C

Es posible que contar en grupos que contengan un número igual de elementos sea más fácil, aunque esto no se evidencia únicamente con la respuesta escrita (dibujo de caramelos de goma). Como la niña, por su edad, no sabía escribir, complementamos la información escrita con una entrevista.

Estrategias

Estas fueron las estrategias que utilizó el estudiante para resolver las preguntas que involucraban las funciones f(n)=n y f(n)=3n. Tabla 3 Contiene una descripción junto con un ejemplo de la respuesta dada por el estudiante.

La Tabla 3 muestra la variedad de estrategias y relaciones establecidas por la estudiante, todas ellas correctas. Encontramos que en las primeras secciones (números próximos y consecutivos: n=1, 2, 3 y 4), utilizó el conteo mediante dibujos. Por ejemplo, en la Sección D de la Tarea 1 dibujó 4 sombreros cuando había 4 niños y en la Tarea 2, cuando se le preguntó sobre 3 niños, dibujó 9 piruletas. En ambos casos utilizó la misma estrategia.

Cuando se le dieron números no consecutivos, cambió de estrategia. En el caso de la Sección F de la Tarea 1, utilizó la respuesta directa: para los 8 niños de la fiesta, sacó su

Tabla 2 Representación de la prueba escrita y la entrevista

	Sección de prueba escrita								Entrevista	
	A	B	do	D	Y	F	GRAMO	yo	Función directa	
	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=8	n=10	n=x	(n=30)	(n=100)
Tarea 1	P	PAG	PAG	PAG	norte	norte	norte	V	V	V
Tarea 2	P	PAG	PAG	PAG	PAG	V	V	V	V (muchos)	

Pictórico, numérico, verbal

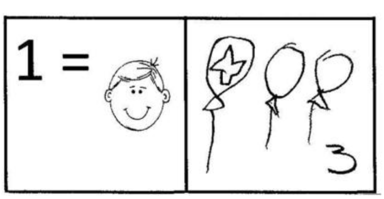


Fig. 5 Tarea 1, Sección A

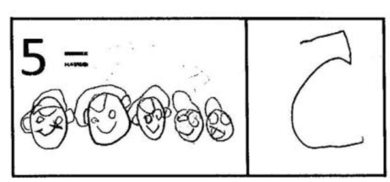
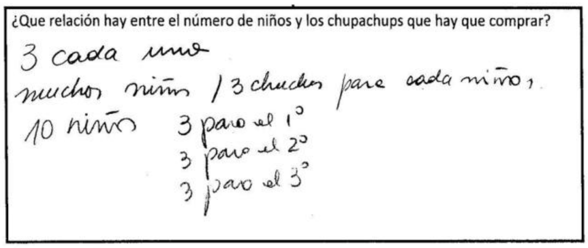


Fig. 6 Tarea 1, Sección E



Note: What is the relationship between the number of children and the lollipops needed? 3 each. Many children / 3 candies for each child. 10 children. 3 for the 1st, 3 for the 2nd, 3 for the 3rd.

Fig. 7 Tarea 2, Sección H

caras y simplemente escribió el número 8 como respuesta. En la Sección E de la Tarea 2, empleó la agrupación como estrategia.
Podemos ver las caras dibujadas y las piruletas correspondientes a cada invitado, marcadas con iniciales para indicar la propiedad. Así vemos M de Mamá y P de Papá y la

Las letras R, V y U corresponden a las iniciales de sus hermanas y a las suyas propias. Este método es exclusivo de esta sección y coincide con el número de miembros de su familia.

Por ejemplo, cuando nos referimos a estrategias, la estudiante respondió lo que se muestra a continuación, demostrando que emplea la agrupación: para ella, cada número 3 representa un grupo de piruletas para un niño.

Investigador: ¿Cómo sabías que eran 6 piruletas para dos niños?

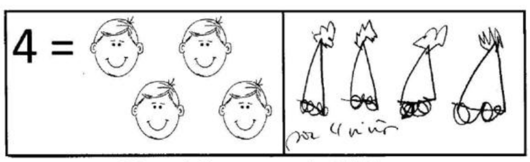
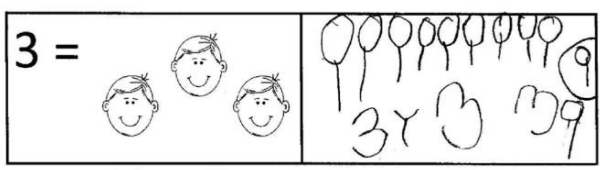
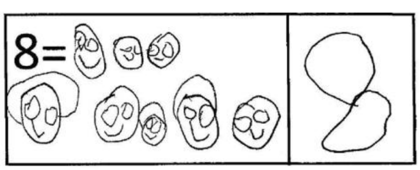
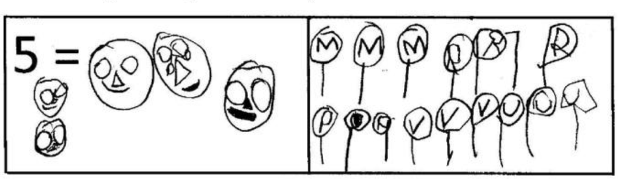
R: 3 y 3, los dibujé yo.

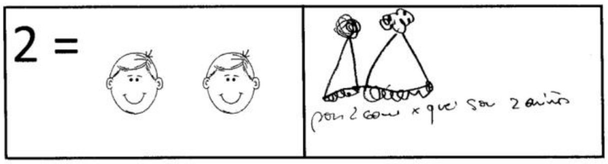
Investigador: ¿Y aquí? [Para 4 niños].

R: 3 y 3, y 3, y 3.

Mientras que en la prueba escrita la tarea consistió en dibujar y contar, en la entrevista semiestructurada se evidenció la formación de grupos de 3 elementos. Contar de 3 en 3 puede ser una estrategia que emergió en la entrevista, luego de trabajar todas las tareas.

Tabla 3 Estrategias y ejemplos

Descripción de la categoría estrategias	Subcategorías	Respuestas
Contando con dibujos. Dibujo de los elementos correspondientes a la sección solicitada	Relación 1 a 1	 *Note*: There are 4 children (Task 1, Section D)
	Relación de 1 a 3	 (Task 2, Section C)
Respuesta directa. Un número, expresión aritmética o secuencia numérica para respuesta	Relación 1 a 1	 (Task 1, Section F)
Agrupación de elementos. Ordenar los elementos necesarios en filas, columnas umnas, o grupos	Todos los grupos son correctos (1–3)	 (Task 2, Section E)



Note: There are 2 hats cos there are two children.

Fig. 8 Tarea 1, Sección B

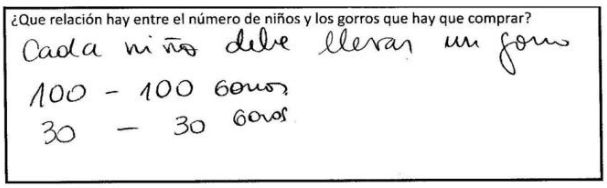


Fig. 9 Tarea 1, Sección H

Generalización

Encontramos indicios de pensamiento funcional en la prueba escrita, ya que la estudiante respondió correctamente todas las secciones en ambas tareas. Inferimos que identificó una relación entre los dos conjuntos de datos. En la entrevista, cuando se le preguntó sobre sus respuestas en cada sección, demostró la relación funcional que identificó en cada tarea, lo cual fue registrado por el investigador en la misma hoja de trabajo.

A continuación se presentan ejemplos detallados de esta evidencia del pensamiento funcional.

En la tarea 1, en la que cada niño recibe un sombrero, respondió las primeras secciones con dibujos y el resto con números.
La relación que estableció fue la siguiente: "cada niño recibe un sombrero… 5 niños, 5 sombreros". Cuando le preguntaron cuántos sombreros necesitaba para dos niños, dibujó dos sombreros y respondió: "Hay dos sombreros porque hay dos niños" (Fig. 8).

Cuando se le preguntó explícitamente sobre la relación entre los niños y los sombreros, respondió: "cada niño debe usar un sombrero", "30 niños, 30 sombreros", "100 niños, 100 sombreros" (Fig. 9).

En la tarea 2, la función involucrada fue f(n)=3n, donde cada niño recibe 3 piruletas. Respondió las primeras secciones con dibujos de la cantidad de piruletas necesarias antes de utilizar posteriormente la agrupación. Cuando se le preguntó la cantidad de piruletas para 4 niños, respondió: "3 y 3 y 3 y 3".
Aunque dibujó sin hacer referencia a esta agrupación, su respuesta verbal demostró la estrategia de conteo mejorada adoptada (véase la figura 10).

Cuando se le preguntó sobre la relación entre el número de hijos y el número de piruletas, dijo: "3 cada uno", "muchos hijos, 3 piruletas para cada hijo", "10 hijos, 3 para el primero, 3 para el segundo, 3 para el tercero…". Hizo explícita la relación funcional f(n)=3n , asignando 3 piruletas a cada hijo, independientemente del número de hijos.

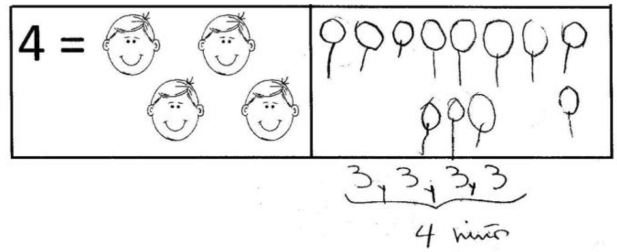


Fig. 10 Tarea 2, Sección D

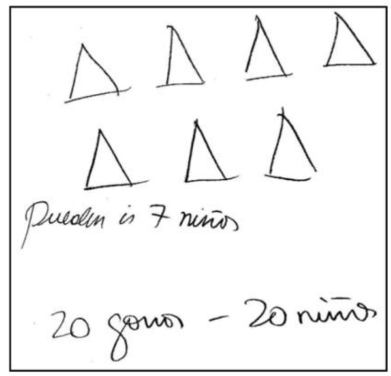


Fig. 11 Entrevista, Tarea 1

En la tarea 1 es difícil determinar si generalizó o simplemente identificó la relación, aunque sí deja claro que "cada niño debe llevar un sombrero". La tarea 2 sirvió para ratificar que la estudiante era capaz de establecer una relación funcional para cualquier elemento sobre el que se le preguntara. La estrategia de agrupamiento también prevaleció en la generalización.

Función inversa

Habiendo avanzado en la función directa, optamos por examinar la función inversa durante la entrevista. Adoptamos los mismos criterios de análisis que para la función directa.

En la tarea 1, le preguntamos a cuántos niños podríamos invitar a la fiesta si tuviéramos 7 sombreros, a lo que ella respondió: "7 niños pueden venir". Cuando le preguntamos: "¿Y si tenemos 20 sombreros?", ella respondió: "20 niños" (Fig. 11). Los dibujos y la escritura fueron realizados por la investigadora.

En la tarea 2, preguntamos cuántos niños podrían ser invitados a la fiesta si había 6 piruletas. La figura 12 muestra su respuesta escrita, mientras que su respuesta verbal fue: "Hay 2 niños". Entendemos que la niña quería escribir 2 pero escribió 5, invirtiendo el símbolo porque aún no lo dominaba.

La investigadora le preguntó a la estudiante sobre las relaciones entre todas las variables (niños-gorros-paletas), dado solo uno de esos valores. Se le preguntó cómo

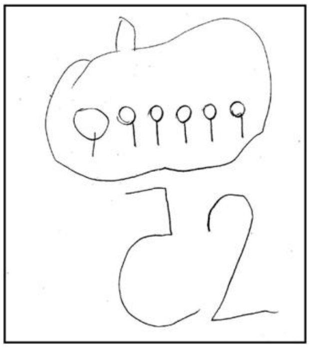


Fig. 12 Entrevista, tarea 2

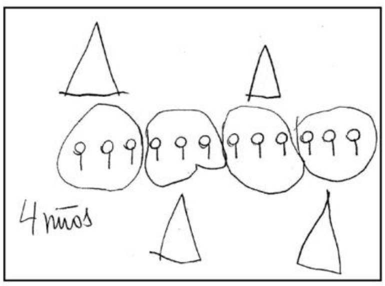


Fig. 13 Entrevista, relación entre niños, sombreros y piruletas

Cuántos niños podrían ir a la fiesta y cuántos sombreros se necesitarían si tuviéramos 12 piruletas (Fig. 13). Le dieron 12 piruletas dibujadas en fila. Las agrupó en 3, las rodeó con un círculo y luego dibujó un sombrero sobre cada círculo.

Cuando le preguntamos cuántos niños podían ir a la fiesta, ella respondió: "4 niños pueden ir a la fiesta".

Finalmente, planteamos la posibilidad de celebrar una fiesta para la clase del estudiante, lo que dio lugar al siguiente diálogo:

R: Necesito saber cuántos hay.

Investigador: Hay 25, los conté ayer.

R:Son 25 sombreros.

Investigador: ¿Y cuántos dulces?

R: 25, uno para cada niño.

Investigadora: ¿Y la mamá de Lola, cuántos les daría?

R: Tres… así que 3 por uno, 3 por otro, 3 por otro.
uno …

Durante el diálogo, notamos que necesitaba un número específico para poder hacer sus cálculos, incluso si se trataba de un número alejado de su alcance numérico. En relación con la cantidad de sombreros, respondió fácilmente que era 25; en cambio, para la cantidad de piruletas utilizó la relación 1 a 1. Cuando se le preguntó sobre la relación inicial, corrigió su respuesta asignando 3 a uno, 3 a otro, hasta que tuvo en cuenta a todos los estudiantes de la clase.

Conclusiones

Nuestro objetivo de investigación fue describir las representaciones y estrategias empleadas por un niño de 4 años al generalizar en tareas que involucran las funciones lineales f(n)=n y f(n)=3n.
y sus respectivas funciones inversas. A partir de los datos recabados, pudimos describir las relaciones funcionales que estableció entre las variables propuestas, cumpliendo con el objetivo de investigación.

Este estudio contribuye principalmente al enfoque funcional del álgebra temprana en dos aspectos. En primer lugar, explora el pensamiento funcional en entornos preescolares, un tema sobre el que hay muy pocas publicaciones y, como se ha señalado, varias áreas que merecen ser examinadas. Estas incluyen las funciones inversas, que son la segunda contribución de este artículo al campo. Hasta donde sabemos, no hay referencias a relaciones inversas en entornos preescolares, e incluso las referencias a la educación primaria temprana son escasas.

Respecto al pensamiento funcional, la estudiante comprendió lo que se le preguntaba y sus respuestas articularon la relación entre las variables involucradas en la tarea.
Ella demostró su pensamiento funcional a través de afirmaciones como: "Cada niño recibe 1 sombrero, entonces 5 sombreros, 5 niños".
En este caso, la estudiante verbalizó explícitamente su generalización.

La estudiante empleó representaciones pictóricas para resolver las tareas que involucraban números casi consecutivos y utilizó representaciones simbólicas para las preguntas que involucraban números no consecutivos lejanos. Sus estrategias incluyeron contar con dibujos, dar respuestas directas y crear grupos.
Cabe destacar que utilizó letras como etiquetas de manera innata en la Tarea 2. Para n=5, empleó las letras MPVUR para asignar 3 piruletas a cada miembro de su familia: M por mamá, P por papá y V, U y R representando las iniciales de sus dos hermanas y de ella misma. Cuando se le preguntó sobre la función inversa, la estudiante resolvió los problemas sin mayores dificultades, utilizando la estrategia de agrupar cantidades iguales de elementos. La distribución en partes iguales surgió de manera innata para resolver el problema planteado. Además, cuando se le dio solo una de las variables, pudo establecer una conexión.

Entre todos ellos.

Consideramos fundamental realizar entrevistas a

Complementar los datos obtenidos en la prueba escrita. La aplicación de una prueba escrita, el hecho de darle a la estudiante el espacio para plasmar sus respuestas en papel y luego discutir con ella lo que había escrito, lo que quería expresar y las estrategias adoptadas nos permitió explorar las relaciones directas e inversas entre varias variables.

Al comparar los hallazgos de este estudio con otros que abordaron grupos de edad o temas similares, encontramos que en Castro et al. (2017) los estudiantes de 5 años establecieron la relación funcional para diferentes funciones, al igual que en

nuestro estudio, en el que el estudiante era un año más joven.
El estudiante de este trabajo descubrió la relación multiplicativa de la misma manera que los niños de Blanton y Kaput (2004). En este estudio, demostramos el predominio de la representación pictórica y verbal. Esto ya había sido documentado por Torres et al. (2022) en niños 2 años mayores. En Fuentes y Cañadas (2021), algunos estudiantes de primer grado utilizaron la agrupación para resolver la función inversa, como ocurrió aquí. López-Centella (2019) encontró que los 30 estudiantes evaluados experimentaron mayores dificultades con la función inversa que con la función directa. Esto se destaca

a diferencia de nuestro estudio, en el que la resolución de la función inversa no entrañó mayor dificultad.

No observamos que la estudiante tuviera ninguna dificultad para resolver las tareas: completó con éxito todas las tareas y secciones y generalizó de manera efectiva tanto para la función directa como para la inversa. Nuestra hipótesis es que esto pudo deberse a que el trabajo se realizó como una entrevista semiestructurada y la estudiante trabajó individualmente, lo que nos permitió introducir la función inversa una vez que respondió correctamente las preguntas sobre la función directa.

Este estudio demuestra la viabilidad de trabajar con estudiantes en edades tempranas, animando a los docentes a incorporar el pensamiento algebraico en sus clases e integrar actividades que involucren conjuntos covariantes en contextos familiares para los estudiantes.
Al considerar el cultivo del pensamiento funcional en entornos familiares, además de seleccionar dos o más conjuntos correlacionados en situaciones como poner la mesa, ayudar a preparar el postre o hacer las compras, la clave es darles espacio y tiempo para pensar y no darles la respuesta. En lugar de eso, los educadores deben permitirles reconocer y corregir cualquier error y plantear preguntas que los ayuden a encontrar la solución por sí mismos. Por ejemplo, los educadores podrían preguntar: “Si solo estamos dos para cenar, ¿cuántas cucharas debemos poner en la mesa? ¿Y si estamos todos para cenar?”.

Las limitaciones de este estudio surgen tanto del tamaño de la muestra como de la tarea propuesta, lo que impide una generalización amplia de los hallazgos. En primer lugar, se trata de un estudio de caso con un solo sujeto, lo que aporta nueva información y sirve como exploración inicial. Las investigaciones futuras deberían incluir a más niños de este grupo de edad. En segundo lugar, las tareas propuestas poseen características específicas y se debería investigar con otro tipo de tareas para contrastar o profundizar en los hallazgos. En tercer lugar, al trabajar con un solo niño, realizamos entrevistas semiestructuradas.
Al trabajar con grupos de tamaño de clase, emplear otras metodologías, como utilizar material específico o pictórico y plantear preguntas que lleven a los estudiantes a cuestionar la generalización utilizando diferentes representaciones, complementaría este estudio.

A partir de los hallazgos presentados en este trabajo, podemos concluir que los estudiantes de educación infantil, como los de 4 años, son capaces de establecer relaciones funcionales informales e innatas cuando participan en tareas que involucran dos o más grupos de elementos en constante cambio. Es responsabilidad del docente proporcionar a los estudiantes tareas desafiantes y enriquecedoras que los inciten a considerar cómo determinar esta variación.

Agradecimientos Este estudio fue apoyado por el proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/https://doi.org/10.13039/501100011033, la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y por la ANID y su programa de becas de doctorado N° 72210402, de Chile.

Funding Funding was provided Agencia Estatal de Investigación (Grant No. PID2020-113601GB-I00).

Declaraciones

Intereses en conflicto Los autores informan que no tienen intereses en conflicto que declarar.

Referencias

Anglada, ML y Cañadas, MC (2021). Correspondencia y gene-eralización de estudiantes de último curso de Educación Infantil Correspondencia y generalización en estudiantes de último año de educación infantil. En PD Diago, DF Yáñez, MT González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), Investigación en Edu-cación Matemática XXIV (pp. 123–130). SEIEM.

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2020). Significados atribuidos a las letras en contextos funcionales por estudiantes de educación primaria. Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas, 18(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Capacidad de los estudiantes de primaria para el pensamiento funcional. En MJ Hoines y A. Fuglestad (Eds.), Actas de la 28.ª Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática (Vol. 2, págs. 135-142). Pymes.

Blanton, M., y Kaput, J. (2011). El pensamiento funcional como vía de acceso al álgebra en los grados de primaria. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), Algebrización temprana (pp. 5–23). Springer-Verlag.

Blanton, ML, Levi, L., Crites, T. y Dougherty, BJ (2011). Desarrollo de una comprensión esencial del pensamiento algebraico para la enseñanza de las matemáticas en los grados 3.º a 5.º. NCTM.

Brizuela, B., y Earnest, D. (2008). Sistemas de notación múltiple y comprensión algebraica: el caso del problema del “mejor trato”. En JJ Kaput, DW Carraher y ML Blanton (Eds.), Álgebra en los primeros grados (pp. 273–302). LEA.

Brizuela, BM y Lara-Roth, S. (2002). Relaciones aditivas y tablas de funciones. Journal of Mathematical Behavior, 20(3), 309–319. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00076-7

Brizuela, BM, Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. (2015). Uso de la notación de variables por parte de los niños para representar sus ideas algebraicas. Mathematical Thinking and Learning, 17, 34–63. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). Un procedimiento para la carac-terización de estrategias en problemas de sucesiones que involu-cran el razonamiento inductivo [A procedure for the characteri-zation of strategies in succession problems that involve inductive reasoning] (pp. 13–24). Indivisa. Boletín de Estudios e Investi-gación, Monografía IV.

Cañadas, M. C., & Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio [Functional thinking in frst-year primary teacher

Machine Translated by Google

students: An exploratory study]. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 211–220). SEAMOS.

Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento fun-cional en las primeras edades [An approach to the conceptual framework and main antecedents of functional thinking in the early ages]. In E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo, & M. Torralbo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico (pp. 209–218). Comares.

Cañadas, MC, Brizuela, BM, & Blanton, M. (2016). Estudiantes de segundo grado articulando ideas sobre relaciones funcionales lineales. Revista de comportamiento matemático, 41, 87–103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, MC, Moreno, A., y Torres, MD (2024). Primer encuentro con la construcción de grafos en el enfoque de pensamiento funcional para el álgebra escolar en 3.º y 4.º grado. ZDM-Mathematics Education. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2

Carpenter, TP y Franke, M. (2001). Desarrollo del razonamiento algebraico en la escuela primaria: generalización y demostración. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), El futuro de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Actas de la 12.ª conferencia de estudio del ICMI (vol. 1, págs. 155-162). ICMI.

Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. Edu-cación Matemática En La Infancia, 6(2), 1–13. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis [Semiosis and noesis]. In E. Sánchez & G. Zubieta (Eds.), Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa (pp. 118–144). Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Fuentes, S. (2014). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio [Functional thinking of frst-year primary school students: An exploratory study]. Universidad de Granada.

Fuentes, S., & Cañadas, M. C. (2021). Estrategias utilizadas por alumnos de primero de primaria para establecer una función inversa [Strategies used by frst grade students to establish an inverse function]. In A. Figueroa, G. Meza, M. Moya, S. Nav-arrete, M. Silva, & A. Quiroz (Eds.), Actas XXIV JNEM (pp. 147-152). SOCHIEM.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación [Investigation methodology], 5° edición. Colina McGraw-Hill.

Kaput, JJ (2008). ¿Qué es el álgebra? ¿Qué es el razonamiento algebraico? En JJ Kaput, DW Carraher y ML Blanton (Eds.), Álgebra en los primeros grados (págs. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

López-Centella, E. (2019). Estrategias de resolución de problemas que involucran una función afín y su inversa de alumnos de primero de Educación Primaria desde una aproximación fun-cional del pensamiento algebraico [Problem-solving strategies involving an afne function and its inverse of frst-year students of Primary Education from a functional approach to algebraic thinking]. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

Mason, J. (1996). Expresión de generalidad y raíces del álgebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Enfoques del álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza (págs. 65–86).

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización [Patterns and represen-tations of 5th grade students in a generalization task]. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Prima-ria [Royal Decree 157/2022, of March 1, which establishes the organización y enseñanzas mínimas de la Educación Primaria]. Boletín Oficial del Estado, 56, 24386–24504.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022b). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil [Royal Decree 95/2022, of February 1, which establishes the organization and minimum teachings of Early Childhood Educa-tion]. BOE, 28, 1–33.

Morales, RA, Cañadas, MC, Brizuela, BM, & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional [Func-tional relationships and strategies of frst graders in a functional context]. Enseñanza De Las Ciencias, 36(3), 59–78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N., & Cañadas, M.C. Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en edu-cación infantil y educación primaria en Scopus. Avances de Invetigación en Educación Matemática.

Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. (2000). Principios y estándares para las matemáticas escolares. NCTM.

Piaget, J. (1952). Los orígenes de la inteligencia en los niños. WW Norton & Co. https://doi.org/10.1037/11494-000

Piaget, J. (1978). La equilibración de las estructuras cognitivas. El centro Problema central del desarrollo. SXXI.

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contem-poráneos de Educación Infantil y Primaria [Towards a charac-terization of early algebra from the analysis of the contemporary curricula of Early Childhood Education and Primary Educa-tion]. Educación Matemática, 33, 153–180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Radford, L. (2003). Gestos, habla y surgimiento de signos: un enfoque semiótico-cultural de los tipos de generalización de los estudiantes. Pensamiento y aprendizaje matemático, 5, 37–70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria [Considerations on the mathemat-ics curriculum for secondary education]. In L. Rico (Ed.), La Educación Matemática en la enseñanza secundaria (pp. 15–38). Caballos.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática [On the notions of representation and understanding in mathematics education research]. PNA, 4(1), 1–14. https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172

Smith, E. (2008). El pensamiento representacional como marco para introducir funciones en el currículo de primaria. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), Álgebra en los primeros grados (págs. 133–160). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Torres, M. D., Cañadas, M. C., & Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y signifcado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria [Structures, generalization and meaning of letters in a functional context for 2nd primary students]. In L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 574–583). SEAMOS.

Torres, MD, Brizuela, BM, Moreno, A. y Cañadas, MC (2022). Introducción de tablas a estudiantes de segundo grado de primaria en un contexto de pensamiento algebraico. Matemáticas, 10, 56. https://doi.org/10.3390/math10010056

Torres, MD, Cañadas, MC, y Moreno, A. (2024). Reconocimiento de estructuras y generalización por parte de estudiantes de segundo grado en formas directas e inversas de una función lineal. Pensamiento y aprendizaje matemático. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2324492

Yin, RK (2009). Investigación de estudio de caso: diseño y métodos (4ª ed.). Sage.

Nota del editor: Springer Nature se mantiene neutral con respecto a los reclamos jurisdiccionales en los mapas publicados y las afiliaciones institucionales.